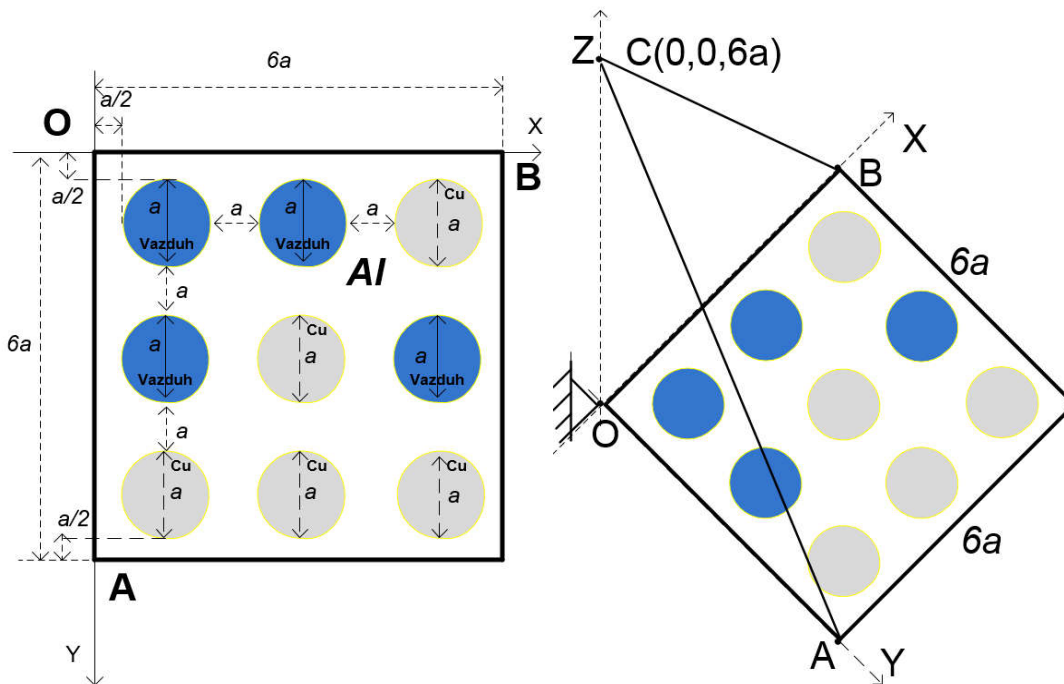


## MEHANIKA

1. Kvadratna aluminijumska ploča ( $6a \times 6a$ ) ima 9 kružnih šupljina. Neke od kružnih šupljina su ispunjene bakrom kao na slici. Ploča se održava u horizontalnom položaju pomoću sfernog zgloba O i užadi AC i BC zanemarljive težine, kao na slici. Tačka C se nalazi na vertikalnom zidu, na udaljenosti  $6a$  od zgloba. Odrediti silu reakcije zgloba i sile zatezanja u užadima AC i BC.

Podaci za ploču su: poluprečnik  $a=10$  cm, debljina ploče  $d=1$  cm, gustine za materijale su:  $\rho_{Al}=2700$  kg/m<sup>3</sup> i  $\rho_{Cu}=8900$  kg/m<sup>3</sup>,  $g=9,81$ m/s<sup>2</sup>.

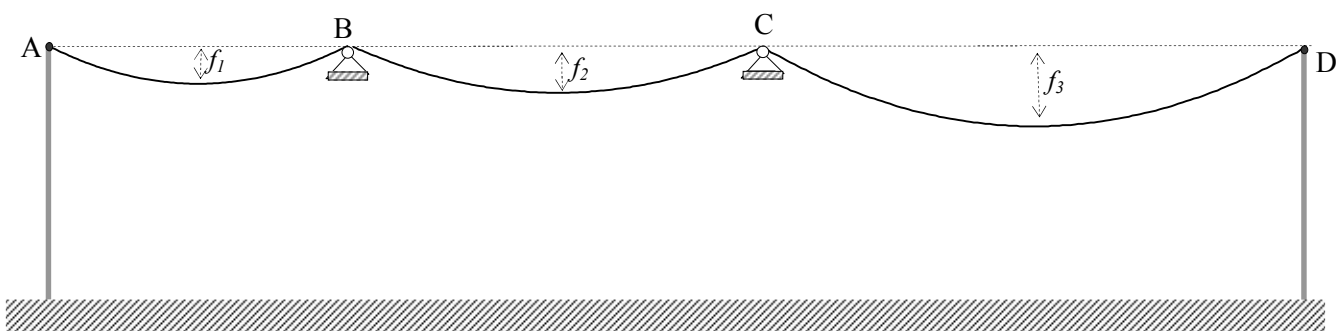


2. Bakarno uže, površine poprečnog preseka  $A=50$  mm<sup>2</sup>, je vezano za tačke A i D, dok je u tačkama B i C uže prebačeno preko koturača zanemarljivih dimenzija, kao na slici. Tačke A, B, C i D se nalaze na istom horizontalnom pravcu, na udaljenostima:  $\overline{AB}=100$  m;  $\overline{BC}=120$  m;  $\overline{CD}=150$  m. Trenje u ležištima koturača zanemariti. Pri temperaturi  $-20$  °C maksimalni ugib užeta u rasponu AB iznosi  $f_1=1,5$  m.

a) Izračunati maksimalne ugibe  $f_2$  i  $f_3$  pri temperaturi užeta od  $-20$  °C.

b) Izračunati maksimalne ugibe  $f_1$ ,  $f_2$  i  $f_3$  pri temperaturi užeta od  $-5$  °C, ako se na delu užeta u rasponu BC ravnomerno nahvata led podužne težine  $q_L=5$  N/m, dok su delovi užeta u rasponima AB i CD bez dodatnog opterećenja.

Parametri užeta su:



3. Lampinjon za uličnu rasvetu je napravljen od gvozdene cevi prstenastog poprečnog preseka, spoljašnjeg prečnika  $d_1=8$  cm i unutrašnjeg  $d_2=7,4$  cm, visine  $H=4$  m (iznad zemlje). Na vrhu lampinjona pričvršćena je kruta svetiljka u obliku sfere, prečnika  $D=0,5$  m, zanemarljive težine. Donji kraj lampinjona je ubetoniran i može se tretirati kao idealno uklještenje. Na lampinjon i svetiljku deluje sila pritiska vetra  $F_v$ .

- Odrediti maksimalnu brzinu vetra ( $V_{max}$ ) pri kojoj lampinjon (stub) nije mehanički ugrožen.
- Za proračunatu brzinu vetra  $V_{max}$  izračunati za koliko se pomeri centar lampe usled dejstva sile pritiska vetra.

Poznato je:

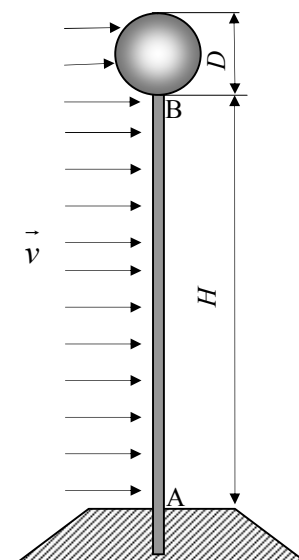
Aerodinamički koeficijent za lampu (sferu):  $C_1=0,5$ ;

Aerodinamički koeficijent za lampinjon (cilindrični stub):  $C=0,7$ ;

Gustina vazduha:  $\rho=1,2$  kg/m<sup>3</sup>;

Modul elastičnosti lampinjona:  $E=2 \cdot 10^{11}$  Pa;

Dozvoljeno mehaničko naprezanje za cev lampinjona:  $\sigma_d=10^8$  Pa.



**Napomena:** Ispit traje maksimalno 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade zadatak 3 i jedan od preostala dva zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke.

**MEHANIKA**  
**Rešenja zadataka**

1.

Prvo je potrebno odrediti težište ploče.

$$m_1 = m_{Al} = \rho_{Al} 36a^2 d$$

$$m_2 = m_{Cu-Al} = a^2 / 4\pi(\rho_{Cu} - \rho_{Al})d$$

$$m_3 = m_{-Al} = a^2 / 4\pi(\rho_{Al})d$$

$$x_{c1} = y_{c1} = 3a = 0,3m$$

$$x_{c2} = x_{c5} = x_{c8} = a = 0,1m$$

$$x_{c3} = x_{c6} = x_{c9} = 3a = 0,3m$$

$$x_{c4} = x_{c7} = x_{c10} = 5a = 0,5m$$

$$y_{c2} = y_{c3} = y_{c4} = a = 0,1m$$

$$y_{c5} = y_{c6} = y_{c7} = 3a = 0,3m$$

$$y_{c8} = y_{c9} = y_{c10} = 5a = 0,5m$$

$$x_c = \frac{m_1 x_{c1} - m_3 (x_{c2} + x_{c3} + x_{c5} + x_{c7}) + m_2 (x_{c4} + x_{c6} + x_{c8} + x_{c9} + x_{c10})}{m_1 - 4m_3 + 5m_2} = 0,312m$$

$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} - m_3 (y_{c2} + y_{c3} + y_{c5} + y_{c7}) + m_2 (y_{c4} + y_{c6} + y_{c8} + y_{c9} + y_{c10})}{m_1 - 4m_3 + 5m_2} = 0,324m$$

$$Q = 110,9N$$

U zadatku je pet nepoznatih pa je potrebno postaviti pet jednačina:

$$X_0 - S_B \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$Y_0 - S_A \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$Z_0 + S_A \cos \frac{\pi}{4} + S_B \cos \frac{\pi}{4} - Q = 0$$

$$Qy_c - S_A \cos \frac{\pi}{4} 6a = 0$$

$$-Qx_c + S_B \cos \frac{\pi}{4} 6a = 0 = 0$$

Rešenje sistema, rezultati su:

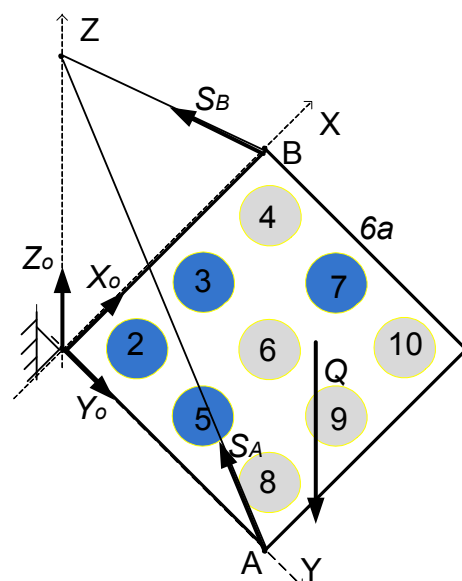
$$S_A = 81,6N$$

$$S_B = 84,7N$$

$$Z_0 = -6,7N$$

$$Y_0 = 57,6N$$

$$X_0 = 59,9N$$



2. S obzirom da je uže prebačeno preko koturača bez trenja, sile u užetu su jednake u svim rasponima. Pošto je provodnik konstantnog poprečnog preseka, onda su i naprezanja jednaka u svim rasponima, i to važi za sva stanja provodnika.

a) Proračun naprezanja u užetu pri temperaturi  $-20^{\circ}\text{C}$ :

$$\sigma_0 = \frac{\gamma l_1^2}{2f_{01}} = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 50^2}{2 \cdot 1,5} = 7,417 \cdot 10^7 \text{ Pa.}$$

Proračun ugiba provodnika u rasponima:

$$f_{02} = \frac{\gamma l_2^2}{2\sigma_0} = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 60^2}{2 \cdot 7,417 \cdot 10^7} = 2,16 \text{ m;}$$

$$f_{03} = \frac{\gamma l_3^2}{2\sigma_0} = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 75^2}{2 \cdot 7,417 \cdot 10^7} = 3,375 \text{ m.}$$

b) Proračun ekvivalentne specifične težine užeta pri uslovima leda:

$$q_{ekv} = q_0 + q_L = \gamma_{ekv} A_0 \Rightarrow$$

$$\gamma_{ekv} = \frac{q_{ekv}}{A_0} = \frac{q_0 + q_L}{A_0} = \gamma + \frac{q_L}{A_0} = 8,9 \cdot 10^4 + \frac{5}{5 \cdot 10^{-5}} = 18,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$$

Proračun ukupne dužine nezategnutog užeta pri temperaturi  $t_0 = -20^{\circ}\text{C}$ :

$$L_{ABCD0} = 2L_{AB0} + 2L_{BC0} + 2L_{CD0} = 2l_1 + \frac{4f_1^3 - 3\gamma l_1^4}{3l_1 f_1} + 2l_2 + \frac{4f_2^3 - 3\gamma l_2^4}{3l_2 f_2} + 2l_3 + \frac{4f_3^3 - 3\gamma l_3^4}{3l_3 f_3} = 370,1167 \text{ m}$$

Proračun ukupne dužine nezategnutog užeta pri temperaturi  $t = -5^{\circ}\text{C}$ :

$$L_{ABCD0L} = L_{ABCD0}(1 + \alpha \Delta t) = 370,1167 \cdot (1 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot 15) = 370,2111 \text{ m.}$$

Proračun naprezanja u užetu pri temperaturi  $t = -5^{\circ}\text{C}$  u uslovima kada na srednjem rasponu postoji ravnomerno nahvatan led:

$$L_{ABCDL} = (2L_{ABL} + 2L_{BCL} + 2L_{CDL}) = 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + \frac{4}{3} \left( \frac{f_{1L}^2}{l_1} + \frac{f_{2L}^2}{l_2} + \frac{f_{3L}^2}{l_3} \right) =$$

$$= 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + \frac{4}{3} \left( \frac{\gamma^2 l_1^3}{4\sigma_L^2} + \frac{\gamma_{ekv}^2 l_2^3}{4\sigma_L^2} + \frac{\gamma^2 l_3^3}{4\sigma_L^2} \right) = L_{ABCD0L} \left( 1 + \frac{\sigma_L}{E} \right)$$

$$L_{ABCD0L} \sigma_L^3 + (L_{ABCD0L} - (2l_1 + 2l_2 + 2l_3)) E \sigma_L^2 - \frac{1}{3} (\gamma^2 l_1^3 + \gamma_{ekv}^2 l_2^3 + \gamma^2 l_3^3) E = 0$$

$$370,2111 \sigma_L^3 + 2,3221 \cdot 10^{10} \sigma_L^2 - 4,4174 \cdot 10^{26} = 0$$

$$\sigma_L = 8,875 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Proračun ugiba provodnika u rasponima pri temperaturi  $t = -5^{\circ}\text{C}$  u uslovima kada na srednjem rasponu postoji ravnomerno nahvatan led:

$$f_{01} = \frac{\gamma l_1^2}{2\sigma_L} = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 50^2}{2 \cdot 8,83 \cdot 10^7} = 1,264 \text{ m;}$$

$$f_{02} = \frac{\gamma_{ekv} l_2^2}{2\sigma_L} = \frac{18,9 \cdot 10^4 \cdot 60^2}{2 \cdot 8,83 \cdot 10^7} = 3,833 \text{ m};$$

$$f_{03} = \frac{\gamma_3^2}{2\sigma_L} = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 75^2}{2 \cdot 8,83 \cdot 10^7} = 2,821 \text{ m}.$$

3. Usled dejstva pritiska sile vetra na lampinjon i lampu, stub je izložen savijanju. Rezultantne sile pritiska vetra na stub i lampinjon su:

$$F_1 = \frac{1}{2} C_1 \rho d_1 H V^2 = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 1,2 \cdot 0,08 \cdot 4 \cdot V^2 = 0,1344 V^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2} C_2 \rho \frac{D^2 \pi}{4} V^2 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,2 \cdot \frac{0,5^2 \cdot \pi}{4} \cdot V^2 = 0,0589 V^2$$

a) Maksimalni moment savijanja javlja se u tački uklještenja A i iznosi:

$$M_{\max} = M_A = F_1 \cdot \frac{H}{2} + F_2 \cdot \left(H + \frac{D}{2}\right) = (0,1334 \cdot 2 + 0,0589 \cdot 4,25) = 0,5171 V^2$$

Maksimalno naprezanje koje se javlja u stubu je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{0,517 V^2}{W_x} \leq \sigma_d$$

$$W_x = \frac{\pi d_1^3 (1 - \psi^4)}{32} = 1,3466 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Maksimalna dozvoljena brzina vetra je:

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{W_x \sigma_d}{0,517}} = \sqrt{\frac{1,3466 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8}{0,517}} \approx 51 \text{ m/s}.$$

b) Da bi se proračuno otklon stuba usled savijanja, potrebno je napisati jednačinu elastične linije stuba. Pre toga potrebno je proračunati reakcije u uklještenju i redukovati silu pritiska vetra na lampinjon na vrh stuba:

$$F_1 = 0,1344 V^2 = 349,6 \text{ N}$$

$$F_B = F_2 = 0,0589 V^2 = 153,2 \text{ N}$$

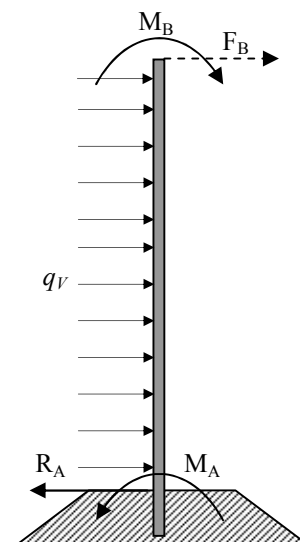
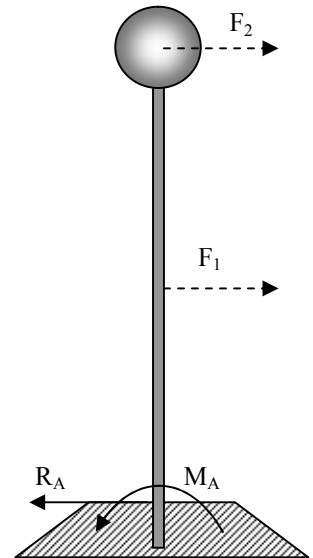
$$q_v = \frac{F_1}{H} = \frac{349,6}{4} = 87,4 \text{ N/m}$$

$$R_A = F_1 + F_2 = 502,8 \text{ N}$$

$$M_A = F_1 \cdot \frac{H}{2} + F_2 \cdot \left(H + \frac{D}{2}\right) = 0,517 V^2 = 1344,7 \text{ Nm}$$

$$M_B = F_2 \cdot \frac{D}{2} = 153,2 \cdot 0,25 = 38,3 \text{ Nm}.$$

Jednačina elastične linije lampinjona:



$$Bu''(z) = -M(z) = -R_A z + \frac{q_V z^2}{2} + M_A$$

$$Bu'(z) = -\frac{R_A z^2}{3} + \frac{q_V z^3}{6} + M_A z + C_1$$

$$Bu(z) = -\frac{R_A z^3}{6} + \frac{q_V z^4}{24} + \frac{M_A z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

$$u''(0) = u'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Proračun mehaničke krutosti stuba:

$$B = EI_x = E \frac{\pi d_1^4 (1 - \psi^4)}{64} = 10,773 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2.$$

Proračun ugiba vrha stuba:

$$u_B = u_{(z=H)} = \left( -\frac{R_A H^3}{6} + \frac{q_V H^4}{24} + \frac{M_A H^2}{2} \right) \frac{1}{B} = \left( -\frac{502,8 \cdot 4^3}{6} + \frac{87,4 \cdot 4^4}{24} + \frac{1344,7 \cdot 4^2}{2} \right) \frac{1}{10,773 \cdot 10^4} = 5,9 \text{ cm}$$

Proračun otklona centra lampe:

$$u_2 = u_B + u_B' \frac{D}{2} = u_B + \left( -\frac{R_A H^2}{3} + \frac{q_V H^3}{6} + M_A H \right) \frac{D}{2B} =$$

$$= 0,059 + \left( -\frac{502,8 \cdot 4^2}{3} + \frac{87,4 \cdot 4^3}{6} + 1344,7 \cdot 4 \right) \frac{0,5}{2 \cdot 10,773 \cdot 10^4} = (5,9 + 0,9) \text{ cm} = 6,8 \text{ cm}$$